УДК 514.76

КЛАССИФИКАЦИЯ КОШИ–РИМАНА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glazirina@mail2000.ru

В четырехмерном евклидовом пространстве E_4 рассматривается двумерное многообразие $V^1_{2,2}$ плоскостей L^1_2, в каждой из которых задано по одной точке A (центр плоскости). С этим многообразием ассоциируется двумерное многообразие $V^2_{2,2}$ плоскостей L^2_2, ортогональных соответствующим плоскостям L^1_2 в точках A и являющихся оснащающими плоскостями многообразия $V^1_{2,2}$. Возникают отображения между соответствующими плоскостями $L^1_2 \in V^1_{2,2}$ и $L^2_2 \in V^2_{2,2}$, каждое из которых определяется системой двух неоднородных квадратичных функций с двумя неизвестными или соответствующей комплексной функцией. Выясняется геометрический смысл этих отображений и рассматриваются частные случаи, когда указанные функции являются дифференцируемыми в смысле Коши-Римана или Даламбера-Эйлера или гармоническими в некоторых или во всех точках соответствующих плоскостей L^1_2 или L^2_2. Доказывается существование всех указанных частных случаев. Все рассмотрения носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

1. Аналитический аппарат

Обозначения и терминология в данной статье соответствуют принятым в [1–8].

Рассматривается четырехмерное евклидово пространство E_4, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\bar{A},\bar{e}_j\}$ $(j,k,l=1,2,3,4)$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A} = \omega^j \bar{e}_j,\ d\bar{e}_j = \omega_j^k \bar{e}_k,$$
$$D\omega^j = \omega^k \wedge \omega_k^j,\ D\omega_k^j = \omega_k^l \wedge \omega_l^j. \quad (1.1)$$

Здесь 1-формы ω_k^j удовлетворяют соотношениям

$$\omega_k^j + \omega_j^k = 0, \quad (1.2)$$

которые с учетом (1.1) вытекают из условия ортонормальности репера R:

$$\{\bar{e}_k, \bar{e}_j\} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

где символом $\{\bar{a},\bar{b}\}$ обозначается скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ пространства E_4.

В пространстве E_4 рассматривается многообразие $V^1_{2,2}$ – двумерное многообразие центрированных двумерных плоскостей L^1_2, в каждой из которых задано по одной точке M, называемой центром. К многообразию $V^1_{2,2}$ присоединим ортонормальный репер R так, чтобы

$$M = A,\ L^1_2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2). \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_p=(\bar{A},\bar{e}^*_1,...,\bar{e}^*_p)$ обозначается p-плоскость (p-мерное линейное подпространство), проходящее через точку A параллельно линейно независимым векторам $\bar{e}^*_1,\bar{e}^*_2,...,\bar{e}^*_p$. Из (1.3) в силу (1.1) следует, что дифференциальные уравнения многообразия $V^1_{2,2}$ запишутся в виде:

$$\omega^{\hat{\alpha}} = A^{\hat{\alpha}}_{\alpha}\omega^{\alpha},\ \omega^{\hat{\alpha}}_{\alpha} = A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}, \quad (1.4)$$

$(\alpha,\beta,\gamma=1,2;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=3,4)$. Здесь 1-формы ω^a приняты за базисные, а величины $A^{\hat{\alpha}}_{\alpha}$ и $A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют структурным уравнениям:

$$(dA^{\hat{\alpha}}_{\alpha} - A^{\hat{\alpha}}_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha} + A^{\hat{\beta}}_{\alpha}\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}) \wedge \omega^{\alpha} = 0,$$
$$(dA^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} - A^{\hat{\alpha}}_{\gamma\beta}\omega^{\gamma}_{\alpha} - A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} + A^{\hat{\beta}}_{\alpha\beta}\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}) \wedge \omega^{\alpha} = 0. \quad (1.5)$$

Замечание 1.1. Из (1.2), (1.3) и (1.4) следует, что

$$\omega_{\hat\alpha}^{\alpha} = -\omega_{\alpha}^{\hat\alpha} \Rightarrow \omega_{\hat\alpha}^{\alpha} = A_{\hat\alpha\beta}^{\alpha}\omega^{\beta},\ A_{\hat\alpha\beta}^{\alpha} = -A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}; \qquad (1.6)$$

геометрически это означает, что с многообразием $V_{2,2}^1$ в E_4 инвариантным образом ассоциируется двумерное многообразие $V_{2,2}^2$, элементом которого является плоскость L_2^2, $A \in L_2^2$:

$$L_2^2 = (\bar A, \bar e_3, \bar e_4) \perp L_2^1. \qquad (1.7)$$

2. Отображение $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$

Каждой точке $A \in E_4$ сопоставим отображение f_1 плоскостей L_2^1 и L_2^2, которое каждую точку $X \in L_2^1$ с радиус-вектором

$$\bar X = \bar A + x^{\alpha}\bar e_{\alpha} \qquad (2.1)$$

переводит в соответствующую точку $Y \in L_2^2$ с радиус-вектором

$$\bar Y = \bar A + y^{\hat\alpha}\bar e_{\hat\alpha}.$$

Это отображение определяется следующим образом:

$$f_1 : L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow y^{\hat\alpha} = A_{\alpha}^{\hat\alpha}x^{\alpha} + B_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}x^{\alpha}x^{\beta}, \qquad (2.2)$$

где величины $B_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}$ определяются по формулам

$$B_{\alpha\beta}^{\hat\alpha} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha} + A_{\beta\alpha}^{\hat\alpha}) \qquad (2.3)$$

и в силу (1.5) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$(dB_{\alpha\beta}^{\hat\alpha} - B_{\gamma\beta}^{\hat\alpha}\omega_{\alpha}^{\gamma} - B_{\alpha\gamma}^{\hat\alpha}\omega_{\beta}^{\gamma} + B_{\alpha\beta}^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha}) \wedge \omega^{\beta} = 0. \qquad (2.4)$$

Заметим, что, отображение плоскостей L_2^1 и L_2^2, отвечающее точке A, определяется двумя соответствующими функциями двух аргументов. Поэтому в соответствии с [6, с. 43–44] получаем, что каждое из указанных отображений определяется соответствующей комплекснозначной функцией:

$$\begin{aligned} f_1 : L_2^1 \to L_2^2 : w = f_1(z) = \\ = G_{01}z + G_{02}\bar z + 2G_{12}z\bar z + G_{11}z^2 + G_{22}\bar z^2, \end{aligned} \qquad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} G_{0\alpha} = g_{0\alpha} + ih_{0\alpha},\ G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + ih_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}, \\ 2g_{01} = A_1^3 + A_2^4,\ 2h_{01} = A_1^4 - A_2^3, \\ 2g_{02} = A_1^3 - A_2^4,\ 2h_{02} = A_2^3 + A_1^4, \\ 4g_{11} = B_{11}^3 - B_{22}^3 + 2B_{12}^4,\ 4h_{11} = -2B_{12}^3 + B_{11}^4 - B_{22}^4, \\ 4g_{22} = B_{11}^3 - B_{22}^3 - 2B_{12}^4,\ 4h_{22} = 2B_{12}^3 + B_{11}^4 - B_{22}^4, \\ 4g_{12} = B_{11}^3 + B_{22}^3,\ 4h_{12} = B_{11}^4 + B_{22}^4. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

При этом плоскость L_2^1 объявляется комплексной плоскостью $(z)(z=x^1+ix^2, \bar z=x^1-ix^2)$, а плоскость L_2^2 считается комплексной плоскостью $(w)(w=y^3+iy^4)$. Заметим, что плоскость L_2^1 является областью определения функций (2.5), а плоскость L_2^2 – областью их значений.

Выясним геометрический смысл отображения $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$.

Рассмотрим кривую $K_0(t)$, описываемую точкой $A \in E_4$ и определяемую дифференциальными уравнениями:

$$K_0(t) : \omega^{\alpha} = t^{\alpha}\Theta,\ D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1. \qquad (2.7)$$

Из (1.1) в силу (1.5) следует, что прямая

$$t = (\bar A, \bar e_{\alpha} + A_{\alpha}^{\hat\alpha}\bar e_{\hat\alpha})\, t^{\alpha} \qquad (2.8)$$

касается кривой $K_0(t)$ в точке A.

В силу (1.4, 1.7) и (2.8) замечаем, что прямая $\hat t = (\bar A, \bar e_{\alpha})t^{\alpha}$ является $np_{L_2^1}^{L_2^2} t$ – проекцией прямой t на плоскость L_2^1 в направлении плоскости L_2^2.

Определение 2.1. Точка $X \in L_2^1$ с радиус-вектором (2.1), отвечающая точке $A \in E_4$, и кривая $K_0(t)$ называются соответствующими, если прямая AX параллельна прямой t.

Из (2.7, 2.8) и определения (2.1) замечаем, что точка $X \in L_2^1$ и кривая $K_0(t)$ будут соответствующими тогда и только тогда, когда

$$\frac{\omega^1}{x^1} = \frac{\omega^2}{x^2} \Leftrightarrow t^{\alpha} = \lambda x^{\alpha},\ (\lambda \neq 0). \qquad (2.9)$$

Из (2.1) в силу (1.1) и (1.4) получаем

$$d\bar X = (\cdots)^{\alpha}\bar e_{\alpha} + (A_{\beta}^{\hat\alpha} + x^{\alpha}A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha})\omega^{\beta}\bar e_{\hat\alpha}.$$

Поэтому в силу (2.3, 2.7, 2.8) и определения (2.1) прямая, определяемая векторным параметрическим уравнением

$$\bar Y = \bar A + \lambda y^{\hat\alpha}\bar e_{\hat\alpha}, \qquad (2.10)$$

где $y^{\hat\alpha}$ определяются по формулам (2.2), есть пересечение плоскости L_2^2 с трехмерным пространством, проходящим через плоскость L_2^1 и касательную к линии, описываемой точкой $X \in L_2^1$ вдоль соответствующей кривой $K_0(t)$ в смысле определения 2.1. При этом предполагается, что точка X не является фокусом плоскости L_2^1 в смысле [7], а кривая $K_0(t)$ не является соответствующей фокальной кривой. Таким образом, в силу (2.9) и (2.10) отображение $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$ геометрически характеризуется тем, что оно любую точку $X \in L_2^1$, отвечающую точке $A \in E_4$, переводит в прямую (2.8) в L_2^2, проходящую через точки A и Y. Поэтому отображение f_1 определяется геометрически с точностью до ненулевого параметра λ.

3. Отображение $f_2 : L_2^2 \to L_2^1$

Будем предполагать, что на многообразии $V_{2,2}^0$ величина

$$a \equiv A_1^3A_2^4 - A_1^4A_2^3 \neq 0 \qquad (3.1)$$

в каждой точке $A \in E_4$. Тогда из (1.4) получаем

$$\omega^{\alpha} = B_{\hat\alpha}^{\alpha}\omega^{\hat\alpha}, \qquad (3.2)$$

где $$B_3^1 = \frac{A_2^4}{a},\ B_4^1 = -\frac{A_2^3}{a},\ B_3^2 = -\frac{A_1^4}{a},\ B_4^2 = \frac{A_1^3}{a}. \qquad (3.3)$$

С помощью величин (3.3) и (1.6) построим величины

$$B_{\hat\alpha\hat\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}A_{(\hat\alpha\beta}^{\alpha}B_{\hat\beta)}^{\beta}. \qquad (3.4)$$

Из (1.5) с учетом (3.1–3.4) получаем, что величины $B_{\hat\alpha}^{\alpha}$ и $B_{\hat\alpha\hat\beta}^{\alpha}$ удовлетворяют квадратичным уравнениям:

$$(dB_{\hat\alpha}^{\alpha} - B_{\hat\beta}^{\alpha}\omega_{\hat\alpha}^{\hat\beta} + B_{\hat\alpha}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}) \wedge \omega^{\hat\alpha} = 0,$$

$$(dB_{\hat\alpha\hat\beta}^{\alpha} - B_{\hat\gamma\hat\beta}^{\alpha}\omega_{\hat\alpha}^{\hat\gamma} - B_{\hat\alpha\hat\gamma}^{\alpha}\omega_{\hat\beta}^{\hat\gamma} + B_{\hat\alpha\hat\beta}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}) \wedge \omega^{\hat\beta} = 0.$$

Величины (3.3) и (3.4) определяют отображение $f_2{:}L_2^2{\to}L_2^1$, которое точке $Y{\in}L_2^2$ с радиус-вектором $\overline{Y}=\overline{A}+y^{\hat{a}}\overline{e}_{\hat{a}}$ сопоставляет точку $X{\in}L_2^1$ с радиус-вектором (2.1), по формуле:

$$f_2 : L_2^2 \to L_2^1 :\ x^{\alpha} = B^{\alpha}_{\hat{\beta}}\, y^{\hat{\beta}} + B^{\alpha}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\, y^{\hat{\alpha}} y^{\hat{\beta}} \qquad (3.5)$$

Как и во втором пункте показывается, что отображение (3.5) определяется комплекснозначной функцией вида:

$$\begin{aligned} f_2 &: z = f_2(w) = \\ &= G_{03} w + G_{04}\overline{w} + 2G_{34} w\overline{w} + G_{33} w^2 + G_{44}\overline{w}^2, \end{aligned} \qquad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} 2G_{03} &= (B_3^1 + B_4^2) + i(B_3^2 - B_4^1),\ i^2 = -1, \\ 2G_{04} &= (B_3^1 - B_4^2) + i(B_3^2 + B_4^1), \\ 4G_{33} &= (B_{33}^1 - B_{44}^1 - 2B_{34}^2) + i(-2B_{34}^1 + B_{33}^2 - B_{44}^2), \\ 4G_{44} &= (B_{33}^1 - B_{44}^1 + 2B_{34}^2) + i(2B_{34}^1 + B_{33}^2 - B_{44}^2), \\ 4G_{34} &= (B_{33}^1 + B_{44}^1) + i(B_{33}^2 + B_{44}^2). \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Заметим, что геометрическая интерпретация отображения (3.6) аналогична геометрической интерпретации отображения (2.2). При этом линия, описываемая точкой A, определяется дифференциальными уравнениями

$$\overset{*}{K}_0(t) : \omega^{\hat{\alpha}} = t^{\hat{\alpha}}\, \overset{*}{\Theta},\ D\overset{*}{\Theta} = \overset{*}{\Theta} \wedge \overset{*}{\Theta}_1,$$

а прямая $\overset{*}{t}=(A,\overline{e}_{\hat{\alpha}} + B^{\alpha}_{\hat{\alpha}}\overline{e}_{\alpha})t^{\hat{\alpha}}$ касается $\overset{*}{K}_0(t)$ в точке A.

4. Гармонические и аналитические отображения f_a

В соответствии с [6. С. 75–76] и с учетом (2.3–2.6) и (3.5–3.7) получаем, что каждая из комплекснозначных функций будет дифференцируемой в соответствующей точке $F_{\alpha d}$ (α=1,2;$F_{1d}{\in}L_2^1$;$F_{2d}{\in}L_2^2$) тогда и только тогда, когда координаты $(x^1;x^2){\Leftrightarrow}z=x^1+ix^2$ и $(y^3;y^4){\Leftrightarrow}w=y^3+iy^4$ каждой из этих точек удовлетворяют системам, соответственно:

$$\begin{aligned} f_{1d} : L_2^1 \to L_2^2 \Rightarrow F_{1d} &: \begin{cases} (B_{2\beta}^4 - B_{1\beta}^3)\, x^{\beta} = g_{02}, \\ (B_{2\beta}^3 + B_{1\beta}^4)\, x^{\beta} = -h_{02}; \end{cases} \\ f_{2d} : L_2^2 \to L_2^1 \Rightarrow F_{2d} &: \begin{cases} (B_{4\hat{\beta}}^2 - B_{3\hat{\beta}}^1)\, y^{\hat{\beta}} = g_{04}, \\ (B_{4\hat{\beta}}^1 + B_{3\hat{\beta}}^2)\, y^{\hat{\beta}} = -h_{04}. \end{cases} \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Заметим, что дважды непрерывные функции $y=y(x^1,x^2)$ и $x=x(y^3,y^4)$ в соответствующих точках плоскостей L_2^1 и L_2^2 будут гармоническими тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 y}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 y}{(\partial x^2)^2} = 0,\ \frac{\partial^2 x}{(\partial y^3)^2} + \frac{\partial^2 x}{(\partial y^4)^2} = 0.$$

Поэтому каждая из систем функций (2.2) и (3.5) будет состоять из гармонических функций тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} f_{1r} &: L_2^1 \to L_2^2 : B_{11}^{\hat{\alpha}} + B_{22}^{\hat{\alpha}} = 0, \\ f_{2r} &: L_2^2 \to L_2^1 : B_{33}^{\alpha} + B_{44}^{\alpha} = 0. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Введем следующие определения.

Определение 4.1. Каждое из отображений f_α (α=1,2), отвечающих точке $A{\in}E_4$, называется дифференцируемым или d-отображением в соответствующей точке $F_{\alpha d}$ и обозначается $f_{\alpha d}$, если определяющие их функции двух переменных дифференцируемы в этой точке.

Определение 4.2. Если отображения $f_1{:}L_2^1{\to}L_2^2$, $f_2{:}L_2^2{\to}L_2^1$ отвечающие точке $A{\in}E_4$, являются d-отображениями во всех точках плоскостей L_2^1 и L_2^2, то они называются аналитическими отображениями и обозначаются $f_{\alpha a}$ (α=1,2).

Определение 4.3. Отображения f_α (α=1,2), отвечающие точке $A{\in}E_4$, называются гармоническими и обозначаются $f_{\alpha r}$, если определяющие их функции двух переменных являются гармоническими.

Замечание 4.1. Символом $g_\alpha{\to}g_{\alpha s}$ будем обозначать отображение плоскостей L_2^1 и L_2^2 в каждой точке $A{\in}E_4$, которое является отображением $g_{\alpha s}$ (α=1,2;s=d,a,r) в смысле определений (4.1–4.3), соответственно.

Из определений (4.1–4.3) и в силу (4.1, 2.6, 3.3) и (3.4) следует, что каждое из соотношений определяют гармонические отображения f_{1r}, f_{2r}, соответственно, а соотношения

$$\begin{aligned} &f_{1a} : B_{2\beta}^4 - B_{1\beta}^3 = 0,\ B_{2\beta}^3 + B_{1\beta}^4 = 0,\ A_1^3 = A_2^4,\ A_1^4 + A_2^3 = 0; \\ &f_{2a} : B_{4\hat{\beta}}^2 - B_{3\hat{\beta}}^1 = 0,\ B_{4\hat{\beta}}^1 + B_{3\hat{\beta}}^2 = 0,\ A_1^3 = A_2^4,\ A_1^4 + A_2^3 = 0 \end{aligned} \qquad (4.3)$$

определяют аналитические отображения f_{1a}, f_{2a}, соответственно.

Замечание 4.2. Из соотношений (4.3) вытекают, в частности соотношения (4.2), соответственно. Это, как и следовало ожидать, означает справедливость утверждения: $f_\alpha{\to}f_{\alpha a}{\Rightarrow}f_\alpha{\to}f_{\alpha r}$ (α=1,2).

Определение 4.4. Многообразием $V_{2,2}^{\alpha r}$ (α=1,2; α – фиксировано) называется такое многообразие $V_{2,2}^{\alpha}$, у которого в каждом его элементе отображение f_α ($f_1{:}L_2^1{\to}L_2^2$; $f_2{:}L_2^2{\to}L_2^1$) является отображением $f_{\alpha r}$ в смысле определения (4.3): $f_\alpha{\to}f_{\alpha r}$. Многообразием $V_{2,2}^{\alpha a}$ называется такое многообразие $V_{2,2}^{\alpha}$, у которого в каждом его элементе отображение f_α ($f_1{:}L_2^1{\to}L_2^2$; $f_2{:}L_2^2{\to}L_2^1$) является отображением $f_{\alpha a}$ в смысле определения (4.2): $f_\alpha{\to}f_{\alpha a}$. Многообразиями $V_{2,2}^{12a}$ и $V_{2,2}^{12r}$ называются многообразия вида:

$$\begin{aligned} V_{2,2}^{12a} &= V_{2,2}^{1a} \cup V_{2,2}^{2a}, \\ V_{2,2}^{12r} &= V_{2,2}^{1r} \cup V_{2,2}^{2r}. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Замечание 4.3. Многообразие $V_{2,2}^{1a}$ определяется первой группой соотношений (4.3), а многообразие $V_{2,2}^{2a}$ – второй группой из соотношений (4.3). Поэтому многообразие $V_{2,2}^{12a}$ определяется одновременно первой и второй группами соотношений в (4.3).

5. Геометрические свойства отображений $f_{\alpha r}$, $f_{\alpha a}$

В этом пункте будут выяснены геометрические свойства всех отображений, о которых шла речь в предыдущих пунктах.

Найдем некоторые инвариантные геометрические образы, ассоциированные с многообразием $V_{2,2}^1$, которые дадут дополнительные геометрические результаты.

Если $\overline{X}=\overline{A}+x^\alpha\overline{e}_\alpha$ – радиус-вектор фокуса в плоскости L_2^1 в смысле [7] вдоль соответствующего фокального направления, то из

$$(d\overline{X},\overline{e}_1,\overline{e}_2)=0$$

с учетом (1.1, 1.4, 2.3) и (3.1–3.4) находим, что множество всех фокусов плоскости L_2^1 представляет собой конику K_2^{12}, определяемую в локальных координатах ортонормального репера R системой

$$K_2^{12}:(A_{\alpha 1}^3 A_{\beta 2}^4 - A_{\alpha 2}^3 A_{\beta 1}^4)\,x^\alpha x^\beta - a(B_{33}^1+B_{44}^1)\,x^1 - \\ -a(B_{33}^2+B_{44}^2)\,x^2 + a = 0,\quad x^{\hat\alpha}=0. \tag{5.1}$$

Аналогичным образом получаются уравнения коники K_2^{34}:

$$K_2^{34}:(A_{\hat\alpha 1}^1 A_{\hat\beta 2}^2 - A_{\hat\alpha 2}^1 A_{\hat\beta 1}^2)\,x^{\hat\alpha} x^{\hat\beta} - (B_{11}^3+B_{22}^3)\,x^3 - \\ -(B_{11}^4+B_{22}^4)\,x^4 + 1 = 0,\quad x^{\alpha}=0. \tag{5.2}$$

Пусть $\overline{Z}_1=\overline{A}+tz_1^\alpha\overline{e}_\alpha$ и $\overline{Z}_2=\overline{A}+\tau z_1^{\hat\alpha}\overline{e}_{\hat\alpha}$ – векторные параметрические уравнения прямых $z_1\in L_2^1$ и $z_2\in L_2^2$, проходящих через точку A, и имеющих направляющие векторы $\overline{z}_1=z_1^\alpha\overline{e}_\alpha$ и $\overline{z}_2=z_2^{\hat\alpha}\overline{e}_{\hat\alpha}$, соответственно. Тогда с учетом (2.2) и (3.5) в плоскостях L_2^1 и L_2^2 получаются следующие коники, отвечающие каждой из заданных прямых и определяемые соответствующими алгебраическими уравнениями:

$$F_1(z_2)=\{X(x^1;x^2)\in L_2^1\,|\,f_1(X)\perp z_2\}\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z_2^3A_\alpha^3+z_2^4A_\alpha^4)\,x^\alpha + \\ +(z_2^3B_{\alpha\beta}^3+z_2^4B_{\alpha\beta}^4)\,x^\alpha x^\beta=0,\ x^{\hat\alpha}=0; \tag{5.3}$$

$$F_2(z_1)=\{Y(y^3;y^4)\in L_2^2\,|\,f_2(Y)\perp z_1\}\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z_1^1B_{\hat\alpha}^1+z_1^2B_{\hat\alpha}^2)\,x^{\hat\alpha} + \\ +(z_1^1B_{\hat\alpha\hat\beta}^1+z_1^2B_{\hat\alpha\hat\beta}^2)\,x^{\hat\alpha} x^{\hat\beta}=0,\ x^{\alpha}=0. \tag{5.4}$$

Из (4.1–4.4) и (5.1–5.4) вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 5.1. 1) $f_1\to f_{1r}\Leftrightarrow A$ – центр коники $K_2^{34}\subset L_2^2$,
2) $f_2\to f_{2r}\Leftrightarrow A$ – центр коники $K_2^{12}\subset L_2^1$,
3) $f_\alpha\to f_{\alpha r}\Leftrightarrow$ асимптотические направления коник $F_\alpha(z_\beta)$ $(\alpha,\beta=1,2;\ \alpha\neq\beta)$ взаимно ортогональны в соответствующих плоскостях L_2^1 или L_2^2.

Замечание 5.1. Из определения (4.4) и замечания (4.2) следует, что многообразие $V_{2,2}^{12a}$ является частным случаем соответствующего многообразия $V_{2,2}^{12r}$.

Замечание 5.2. Геометрические свойства многообразий $V_{2,2}^{12r}$ и $V_{2,2}^{12a}$ вытекают из теоремы 5.1 с учетом определения (4.4) и замечаний (4.2) и (5.1).

6. Существование многообразий $V_{2,2}^{\alpha r}$, $V_{2,2}^{12r}$, $V_{2,2}^{\alpha a}$ и $V_{2,2}^{12a}$

Теорема 6.1. Каждое из многообразий $V_{2,2}^{\alpha r}$, $V_{2,2}^{12r}$, $V_{2,2}^{\alpha a}$, $V_{2,2}^{12a}$ существует.

Доказательство. Из определения (4.4) с учетом (4.3) следует, что многообразие $V_{2,2}^{12a}$ характеризуется соотношениями:

$$B_{2\beta}^4 - B_{1\beta}^3=0,\ B_{2\beta}^3+B_{1\beta}^4=0,\ A_1^4+A_2^3=0, \\ A_1^4=A_2^4,\ B_{4\hat\beta}^2-B_{3\hat\beta}^1=0,\ B_{4\hat\beta}^1+B_{3\hat\beta}^2=0, \tag{6.1}$$

$(\alpha,\beta=1,2;\hat\alpha,\hat\beta=3,4)$. Из (1.5) с учетом (1.4) получаем

$$dA_\alpha^{\hat\alpha} - A_\beta^{\hat\alpha}\omega_\alpha^\beta + A_\alpha^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha} = \dot{A}_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}\omega^\beta. \tag{6.2}$$

Проведем с учетом (6.2) и (6.1) такую канонизацию ортонормального репера R, при которой

$$A_1^4\equiv -A_2^3=0,\ A_1^3\equiv A_2^4\neq 0,$$

тогда из (6.2) получаем

$$\omega_1^2-\omega_3^4=\dot{g}_\alpha\omega^\alpha. \tag{6.3}$$

Поэтому в соответствии с [8] указанная канонизация репера R существует.

Обозначим $\dot{V}_{2,2}^{12a}$ – многообразие $V_{2,2}^{12a}$, на котором выполняются соотношения:

$$A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}=0,\ \dot{g}_\alpha=0,\ A_1^4\equiv -A_2^3=0,\ A_1^3\equiv A_2^4=1, \tag{6.4}$$

которые с учетом (6.3) и (1.4) приводят к дифференциальным уравнениям:

$$\omega^3=\omega^1,\ \omega^4=\omega^2,\ \omega_\alpha^{\hat\alpha}=0,\ \omega_1^2-\omega_3^4\equiv\omega_4^3-\omega_2^1=0, \tag{6.5}$$

(по α не суммировать).

Из (1.1) следует, что дифференциальные уравнения (6.5) замкнуты относительно операции внешнего дифференцирования. Это означает, что многообразие $\dot{V}_{2,2}^{12a}$, являющееся подклассом многообразий $V_{2,2}^{12a}$, существует. Поэтому многообразия $V_{2,2}^{\alpha r}$, $V_{2,2}^{12r}$, $V_{2,2}^{\alpha a}$ и $V_{2,2}^{12a}$ существуют.

Теорема 6.1 доказана.

Замечание 6.1. Соотношения (6.1) тождественно выполняются с учетом (6.4), при этом неравенство (3.1) выполняется, поскольку в силу (6.4) a=1.

Замечание 6.2. В случае многообразия $\dot{V}_{2,2}^{12a}$ отображение $f_1\colon L_2^1\to L_2^2$ в силу (2.2) и (6.4) определяется по формулам:

$$f_1: y^3=x^1,\ y^4=x^2;$$

отсюда в силу (3.5) и (6.4) можно легко получить формулы, определяющие отображение $f_2\colon L_2^2\to L_2^1$:

$$f_2: x^1=y^3,\ x^2=y^4.$$

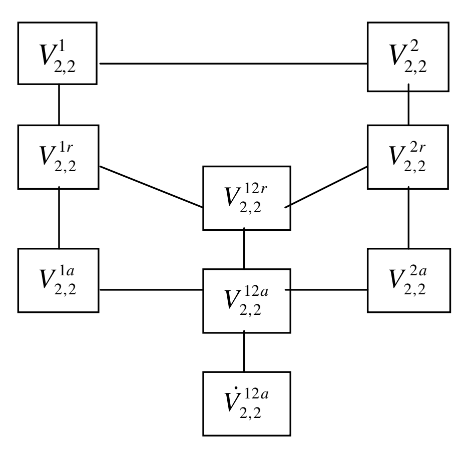


Рисунок. *Классификация Коши-Римана многообразий* $V_{2,2}^\alpha$

Замечание 6.3. Все построения в данной статье в силу (3.5) проведены в предположении, что из рассмотрения исключается случай

$$a \equiv A_1^3 A_2^4 - A_1^4 A_2^3 = 0 \Leftrightarrow \varpi^3 \wedge \varpi^4 = 0, \qquad (6.6)$$

когда точка A принадлежит фокусной конике K_{12}^2 плоскости $L_2^2 \perp L_2^1$, а также случай $\varpi^{\hat{\alpha}}=0$, когда плоскость L_2^1 касается поверхности S_2, описываемой точкой A.

Замечание 6.4. В силу (6.6) или в случае, когда плоскость L_2^1 касается поверхности S_2 в точке A, отображение $f_2 : L_2^2 \to L_2^1$ становится неопределенным.

Замечание 6.5. Из определения (4.4) и результатов данного пункта вытекает следующая схема взаимосвязи многообразий $V_{2,2}^{\alpha r}$, $V_{2,2}^{12r}$, $V_{2,2}^{\alpha a}$, $V_{2,2}^{12a}$ и $\dot{V}_{2,2}^{12a}$ (рисунок).

Замечание 6.6. Классификацию многообразий $V_{2,2}^{12a}$, указанную на рисунке, будем называть **классификацией Коши-Римана**.

Замечание 6.7. Результаты, изложенные в данной статье для двумерного семейства центрированных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве, является ответом на замечание в [1, С. 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. О двумерном многообразии центрированных 2-плоскостей в многомерном эвклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 4. – С. 5–9.
2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
5. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
6. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский гос. ун-т, 2002. – 510 с.
7. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
8. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

УДК 681.5